

# ФОРМАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ЗАПИСИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Блинов Р.В.  
e-mail: [r.v.blinov@mail.ru](mailto:r.v.blinov@mail.ru)

Рассмотрен способ формального описания графов, основанный на иерархическом представлении отношения смежности вершин. Приведены примеры для различных видов графов.

**Ключевые слова:** граф, каркас, остовное дерево, сериализация, XML.

Метод записи основан на представлении исходного графа  $G(V,E)$ <sup>1</sup> с матрицей смежности  $[A]$  в виде суммы остовного дерева и его дополнения до графа  $G$ .

Пусть  $[T]$ -матрица смежности остовного дерева(каркаса) и  $[J]$ -матрица смежности частичного графа (кографа, дополнения каркаса до исходного графа). Тогда

$$[A] = [T] + [J] \quad (1)$$

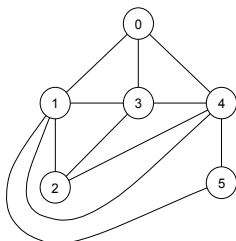
Ниже приведены примеры сериализации матриц смежности  $[T]$  и  $[J]$  в виде вложенных списков.

## Неориентированные графы.

Рассмотрим неориентированный граф (рис.1) с матрицей смежности  $[A]$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

рис.1



Для представления неориентированного графа достаточно рассмотреть соответствующие верхнетреугольные матрицы. Одна из сумм приведена ниже.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Иерархическая запись представляет собой вложенные списки вершин остовного дерева графа и их соединений.

1  $V$ - множество вершин графа,  $E$ - множество рёбер графа  $G(V,E)$

Для поиска остовного дерева  $[T]$  может быть использован любой известный алгоритм, см. [Л1]. Здесь и далее по тексту каркасы получены методом поиска в глубину, начиная с верхней строки матрицы смежности  $[A]$ .

Рёбра, не принадлежащие каркасу, выносятся в матрицу смежности частичного графа  $[J]$ .

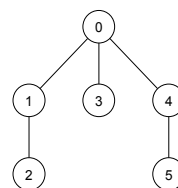
Уровни вложения вершин определяются при обходе остова. Дополнительные соединения вершин остовного дерева берутся из матрицы смежности частичного графа и записываются вложенным списком с префиксами «J» для соответствующей вершины каркаса.

Рассмотренная выше сумма порождает следующую иерархическую запись:

$$(0 (1(2)) (3(J1)(J2)) (4(J1)(J2)(J3)(5(J1))))), \quad (2)$$

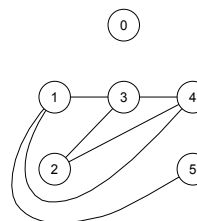
где уровни вложенности вершин 0-5 соответствуют остовному дереву(каркасу)  $(0 (1(2)) (3) (4(5)))$  :

рис.2



и соединения  $J1$ - $J3$  позволяют описать частичный граф(рис.3) в контексте найденного каркаса(рис.2):

рис.3



Порядок вложения соответствующих соединений для записи (2), определяется столбцами матрицы смежности частичного графа.

При просмотре матрицы смежности частичного графа по строкам получим иерархическую запись на том же каркасе, но другого вида:

$$(0 (1(J3)(J4)(J5)(2(J3)(J4))) (3(J4)) (4(5))) . \quad (3)$$

Легко проверить, что записи, полученные просмотром матрицы смежности частичного графа по строкам (3) и по столбцам (2) эквивалентны.

Каждое из полученных описаний графа является полным, поскольку определяет все вершины и рёбра исходного графа в силу построения.

Для определения числа возможных записей, рассмотрим матрицу Кирхгофа исходного графа:

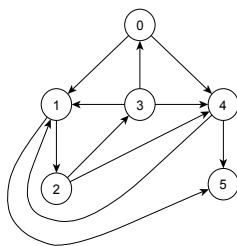
$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Число возможных остонов графа, равное постоянной матрицы Кирхгофа, составит 180. Учитывая, что для каждого каркаса возможны 2 записи, всего существует 360 вариантов иерархической записи исходного графа (рис.1).

### Ориентированные графы.

Пусть задан орграф:

рис.4



Используем следующее разложение на каркас и кограф:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

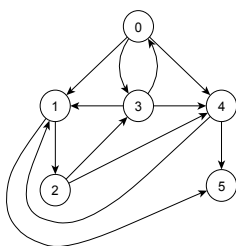
Тогда иерархическая запись примет вид:

$$(0 (J3) (1(J3)(J4)(2(3))) (4(J2)(J3)(5(J1))))). \quad (4)$$

### Ориентированные графы с кратными рёбрами (мультиграфы).

Пусть задан мультиграф:

рис.5



Используем следующее разложение на каркас и кограф:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

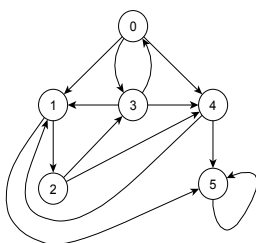
Тогда иерархическая запись примет вид:

$$(0 (J3) (1(J3)(J4)(2)) (3(J2)) (4(J2)(J3)(5(J1))))). \quad (5)$$

### Ориентированные графы с кратными рёбрами и петлями (псевдографы).

Пусть задан псевдограф:

рис.4



Используем следующее разложение на каркас и кограф:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда иерархическая запись примет вид:

$$(0 (J3) (1(J3)(J4)(2)) (3(J2)) (4(J2)(J3)(5(J1)(J5))))). \quad (6)$$

### XML-представление иерархической записи графов.

Для записи произвольного неориентированного графа достаточно следующего минимального определения:

```
<!DOCTYPE graph [
<!ELEMENT joined      (node)>
<!ELEMENT node        (#PCDATA|node|joined)*>
<!ELEMENT graph        (node)>
]>
```

Запись (2) в xml-формате представлена ниже:

```
<?xml version="1.0"?>
<graph>
  <node>0
    <node>1
      <node>2</node>
    </node>
  <node>3
    <joined>
      <node>1</node>
    </joined>
    <joined>
      <node>2</node>
    </joined>
  </node>
  <node>4
    <joined>
      <node>1</node>
    </joined>
    <joined>
      <node>2</node>
    </joined>
    <joined>
      <node>3</node>
    </joined>
  </node>
  <node>5
    <joined>
      <node>1</node>
    </joined>
  </node>
</graph>
```

Иерархическая запись нечувствительна к ordered/unordered режимам обработки XML.

Важнейшим достоинством иерархической записи является возможность навигации по графу непосредственно по осям XPath, без использования связывания сущностей по атрибутам.

### Заключение

Рассмотренный способ записи отличается от исследованного в работах [Л2],[Л3] и заключающегося в кодировании неповторяющихся простых цепей графа.

Представление графа в виде остовного дерева с вложенными соединениями позволяет создать эффективные спецификации хранения и обработки графов в иерархических базах данных.

Существенно могут быть упрощены алгоритмы перестроения графов. Более того, как отмечено в [Л1], “наиболее эффективны методы генерации каркасов [Л4, Л5, Л11] с использованием элементарных преобразований каркасов, причём именно те из них, которые основаны на преобразовании последнего построенного каркаса. Возможность существования таких алгоритмов вытекает из гамильтоновости графа каркасов данного графа (см.разд.2.1.1)[Л1], исследованной в работах [Л6, Л7, Л8, Л9, Л10, Л12].”

### Список литературы.

- [Л1] Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применению-СПб., БХВ-Петербург, 2003.-1104 с.
- [Л2] Мелентьев В.А. Скобочная форма описания графов и её использование в структурных исследованиях живучих вычислительных систем // Автометрия. 2000. №4. С.36-52.
- [Л3] Мелентьев В.А. Формальные основы скобочных образов в теории графов // Труды II Международной конференции "Параллельные вычисления и задачи управления" РАСО'2004 памяти Е.Г. Сухова, Москва, 4-6 октября 2004г., М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2004, С. 694-706.
- [Л4] Chen Wai-Kai, Li H.-C. Computer generation of directed trees and complete trees // Int. J. Electronics.-1973.-Vol.34.-P.1.
- [Л5] Chen Wai-Kai. Applied graph theory.-Amsterdam, North-Holland, 1971.
- [Л6] Cummings R.L. Hamilton circuits in in tree graphs // IEEE Trans. On Circuit Theory.-1966.-Vol.CT-13.-P.82.
- [Л7] Hakimi S.I., On trees of a graph and their generation // J. Franklin Inst.-1961.-Vol.272, N 5.-P.347-359.
- [Л8] Kamae T. The existence of Hamiltonian circuits in tree graphs // IEEE Trans. Circuit Theory.-1967.-Vol.CT-14.-P.279.
- [Л9] Kishi G., Kajitani Y. On Hamilton circuits in tree graphs // IEEE Trans. Circuit Theory.-1968.-Vol.CT-15.-P.42.
- [Л10] Kishi G., Kajitani Y. On the realization of tree graphs // Ibid.-P.271.
- [Л11] Mayeda W. et al Generation of complete trees // IEEE Trans. Circuit Theory.-1968.-Vol. CT-15.-P.101.
- [Л12] Shank H. Note on Hamilton circuits in tree graphs // IEEE Trans. Circuit Theory.-1968.-Vol. CT-15.-P.86.

