

Рассмотрим в качестве примера обычное несложное доказательство следующего утверждения: *если натуральное число не делится на 6 и делится на 9, то оно нечетно*.

Запишем это утверждение, используя логическую символику:

$$6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n \rightarrow 2 \nmid n.$$

В кратком виде традиционное доказательство представляет собой следующее рассуждение: «Согласно условию, n не делится на 6 и делится на 9. Поскольку n делится на 9, то n делится и на 3. Кроме того, n не делится на 6, а значит, n не делится на 2 или на 3. Следовательно, n не делится на 2».

Перечислим в виде последовательности предложения — члены этого краткого рассуждения, для обозримости используя при их записи известные логические символы:

$$6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n; \ 9 \mid n; \ 3 \mid n; \ 6 \nmid n; \ 2 \nmid n \vee 3 \nmid n; \ 2 \nmid n.$$

При такой форме доказательства, т. е. в виде цепочки утверждений, не видно, какое утверждение из какого следует, не просматриваются логические связи между членами этой цепочки.

Теперь то же самое краткое рассуждение представим в виде дерева, выявив все логические связи между членами рассуждения.

Если предложение B непосредственно следует из предложений A_1, \dots, A_n по какому-либо правилу логики, будем привычным образом записывать это так:

$$\frac{A_1 \dots A_n}{B}$$

Если же на каком-то шаге рассуждения сделан сокращенный переход от предложений A_1, \dots, A_n к предложению B , который не является результатом применения какого-то логического правила, записывать это будем с помощью двойной черты следующим образом:

$$\frac{\frac{A_1 \dots A_n}{B}}{B}$$

Каждый такой сокращенный переход обычно возникает в результате пропуска посылки, являющейся общеизвестным утверждением, а также логических умозаключений, связанных с этой посылкой. Двойная черта означает, что эту пропущенную посылку и логические переходы можно восстановить.

Краткое рассуждение, приведенное выше, если его представить в виде дерева, имеет следующий вид (справа изображен граф, отражающий структуру дерева как частично упорядоченного множества):

$6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n$	$6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n$
$6 \nmid n$	$9 \mid n$
$2 \nmid n \vee 3 \nmid n$	$3 \mid n$
$2 \nmid n$	

(1)

Восстановив в кратком варианте рассуждения пропущенные шаги, получим следующее дерево доказательства (справа от которого изображена его графическая структура):

$6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n$	$2 \mid n \ \& \ 3 \mid n \rightarrow 6 \mid n$	$6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n$
$6 \nmid n$	$6 \nmid n \rightarrow \neg(2 \mid n \ \& \ 3 \mid n)$	$9 \mid n$
$\neg(2 \mid n \ \& \ 3 \mid n)$		$9 \mid n \rightarrow 3 \mid n$
$2 \nmid n \vee 3 \nmid n$		$3 \mid n$
$2 \nmid n$		

(2)

Исходными в дереве доказательства (2) служат следующие предложения:

$6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n$ — условие, которое используется дважды;

$2 \mid n \ \& \ 3 \mid n \rightarrow 6 \mid n$ и $9 \mid n \rightarrow 3 \mid n$ — утверждения, доказательства которых известны из арифметики.

Итак, мы упорядочили предложения, составляющие конкретное рассуждение, в виде дерева. В верхушках «ветвей» дерева, так называемых «листьях» дерева, располагаются исходные предложения. В данном случае это допущения, одно из которых представляют собой так называемое «условие», два других — ранее доказанные утверждения (таким образом, доказательство носит относительный характер). В каждом промежуточном узле на ветвях располагается предложение, которое получается с помощью некоторого логического правила из предложений, расположенных непосредственно над ним. Итак, непосредственно над каждым предложением, кроме исходных, записаны те предложения, из которых оно следует по одному из правил логики. Корнем этого дерева служит доказываемое утверждение.

Если столько же подробное рассуждение представить в виде последовательности (цепочки) предложений, то получим последовательность, состоящую из тех же членов:

$$6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n; \ 6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n \rightarrow 6 \nmid n; \ 6 \nmid n; \ 2 \mid n \ \& \ 3 \mid n \rightarrow 6 \mid n; \ 6 \nmid n \rightarrow \neg(2 \mid n \ \& \ 3 \mid n); \ \neg(2 \mid n \ \& \ 3 \mid n); \ 2 \nmid n \vee 3 \nmid n; \ 6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n \rightarrow 9 \mid n; \ 9 \mid n; \ 9 \mid n \rightarrow 3 \mid n; \ 3 \mid n; \ 2 \nmid n.$$

Очевидно, это *линейное доказательство*, хотя и выглядит более компактным, но в отличие от дерева доказательства (2) лишено наглядности. Оно не отражает логические взаимосвязи между членами (логическую структуру доказательства). Если его снабдить комментарием, указывающим на логическую взаимосвязь между членами, то компактность исчезнет, а наглядности по-прежнему не будет:

- 1) $6 \nmid n \ \& \ 9 \mid n$ — допущение (условие);
- 2) $6 \nmid n$ — логически следует из предложения 1;
- 3) $2 \mid n \ \& \ 3 \mid n \rightarrow 6 \mid n$ — известное утверждение из теории делимости;
- 4) $6 \nmid n \rightarrow \neg(2 \mid n \ \& \ 3 \mid n)$ — логически следует из предложения 3;
- 5) $\neg(2 \mid n \ \& \ 3 \mid n)$ — логически следует из предложений 2 и 4;
- 6) $2 \nmid n \vee 3 \nmid n$ — логически следует из предложения 5;
- 7) $9 \mid n$ — логически следует из предложения 1;
- 8) $9 \mid n \rightarrow 3 \mid n$ — известное утверждение из теории делимости;
- 9) $3 \mid n$ — логически следует из предложений 7 и 8;
- 10) $2 \nmid n$ — логически следует из предложений 6 и 9.